**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO** PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

# Perturbaciones Singulares de Operadores Autoadjuntos

T E S I N A

QUE PARA OBTAR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

MARIO ALBERTO RUIZ CABALLERO

DIRECTOR DE LA TESINA:
DR. RAFAEL RENÉ DEL RÍO CASTILLO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México, Diciembre 2020

# Índice general

# Introducción

En la teoría de operadores, una rama del análisis funcional, un problema interesante es el estudio de las propiedades espectrales de operadores lineales autoadjuntos que son obtenidos a través de perturbaciones singulares de rango uno. Estos operadores los denotamos como

$$A_\alpha = A + \alpha \langle \varphi, \cdot \rangle \varphi$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A$ es un operador lineal autoadjunto sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\varphi \in \mathcal{H}$ se habla de perturbaciones de rango uno acotadas. En el caso en que $\varphi$ sea un funcional lineal, $\varphi \notin \mathcal{H}$, llamamos a estas perturbaciones singulares (véase [4]).

Existen varias maneras de darle sentido a $A_\alpha$ cuando $\varphi$ es un funcional definido en el dominio de $A$. Una forma de hacerlo es considerando el operador $B$ definido como restricción del operador $A$ sobre la intersección del dominio de $A$ con el subespacio lineal donde $\varphi$ se anula. Este operador $B$ resulta ser un operador simétrico con índices de deficiencia $(1, 1)$. Se definen entonces las perturbaciones singulares de rango uno, $A_\alpha$, como extensiones autoadjuntas del operador lineal $B$. Estas vienen dadas por la teoría de extensiones autoadjuntas de operadores simétricos de von Neumann. Así, se genera una familia de operadores que dependen de un parámetro real $\alpha$ y un funcional $\varphi$. El asunto fundamental que se desea estudiar es como se comporta el espectro de $A_\alpha$ dependiendo del parámetro $\alpha$ y del funcional $\varphi$, en particular el espectro puntual.
Un tema de interés en este contexto es el análisis de la estabilidad de los valores propios de la familia de operadores $A_\alpha$. Para perturbaciones acotadas es sabido que los valores propios resultan ser muy inestables y además, si el espectro es un conjunto perfecto, se sabe de la existencia de un conjunto "prohibido" donde no se pueden agregar valores propios a través de estas perturbaciones (ver [9] y [10]). En la presente tesina se trató de estudiar este problema para el caso de perturbaciones singulares de rango uno. Específicamente, cuando el operador no perturbado es un caso particular de la expresión diferencial de Sturm-Liouville dotado de un cierto dominio.

En el primer capítulo desarrollaremos la Teoría de extensiones autoadjuntas de operadores simétricos de von Neumann unificando la metodología de [1] y [2]. Se iniciará con un breve estudio de operadores cerrados y simétricos hasta llegar a definir a la transformada de Cayley, así como la deducción de algunas de sus propiedades. Posteriormente procederemos con una breve teoría de operadores cerrables hasta conseguir las herramientas suficientes para una rigurosa demostración del Teorema de extensiones autoadjuntas de von Neumann.

En el segundo capítulo se realizará el estudio de perturbaciones singulares de rango uno basados en [3]. Empezaremos obteniendo algunos resultados que nos permitirán usar la Teoría de extensiones autoadjuntas de von Neumann para operadores simétricos con índices de deficiencia $(1, 1)$. Después aplicaremos los resultados obtenidos a operadores de Sturm-Liouville con $\delta$ interacciones. Con el propósito de no exceder la extensión del presente trabajo, algunos resultados solo serán citados. Finalmente obtendremos el comportamiento de los valores propios de los operadores de Sturm-Liouville a través de las extensiones autoadjuntas de von Neumann.

# Capítulo 1

# Teoría de extensiones

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal. En todo el texto la entrada lineal del producto interior será la segunda y el término operador se usará para hacer referencia a operadores lineales. El rango de $A$ se denota por $Rg(A)$ y su núcleo por $KerA$. El símbolo $\perp$ denotará al complemento ortogonal de un subespacio en $\mathcal{H}$.

## 1.1. La transformada de Cayley

**Definición 1.1.1.** *Sea $A$ un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Definimos su adjunto $A^*$ por el operador tal que*

$$D(A^*) = \{y \in \mathcal{H} |\ \exists u_y \in \mathcal{H} \text{ tal que } \forall x \in D(A),\ \langle Ax, y\rangle = \langle x, u_y\rangle\}$$

*y*

$$A^* y = u_y.$$

**Definición 1.1.2.** *Un operador $A$ densamente definido sobre $\mathcal{H}$ es autoadjunto si $A = A^*$.*

**Definición 1.1.3.** *Un operador $A$ densamente definido sobre $\mathcal{H}$ es simétrico si $A \subseteq A^*$.*

Enunciamos el siguiente resultado (ver [1, Lemma 3.1] y [7, Lemma 10.2-4]).

**Proposición 1.1.1.** *Sea $A$ un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*a) $A$ es simétrico.*

*b) Para todo $x, y \in D(A)$, tenemos que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.*

*c) Para todo $x \in D(A)$, ocurre que $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*

Denotamos por $\mathcal{G}(A)$ a la gráfica de $A$.

**Definición 1.1.4.** *Un operador $A$ sobre $\mathcal{H}$ es cerrado si $\mathcal{G}(A)$ es cerrado en $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

**Definición 1.1.5.** *Decimos que $z \in \mathbb{C}$ es un punto regular del operador $A$ sobre $\mathcal{H}$ si existe un real $c_z > 0$ tal que*

$$\|(A - z)x\| \geqslant c_z\|x\|, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Denotamos al conjunto de puntos regulares por $\pi(A)$. Los siguiente resultados son importantes, pues nos permitirán definir la transformada de Cayley y deducir algunas propiedades.

**Proposición 1.1.2.** *Si el operador $A$ es simétrico sobre $\mathcal{H}$, entonces $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \pi(A)$.*

*Demostración.* Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Para $x \in D(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(A - z)x\|^2 &= \langle (A - z)x, (A - z)x \rangle \\
&= \langle (A - a)x - bix, (A - a)x - bix \rangle \\
&= \langle (A - a)x, (A - a)x \rangle - bi\langle (A - a)x, x \rangle + bi\langle x, (A - a)x \rangle + b^2\langle x, x \rangle \\
&= \|(A - a)x\|^2 + b^2\|x\|^2 \\
&\geqslant b^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

La cuarta igualdad ocurre porque $A$ es simétrico y por la proposición 1.1.1 ya que

$$\langle (A - a)x, x \rangle = \langle x, (A - a)x \rangle.$$

Como $b \neq 0$, tomamos $c_z = |Imz|$ y por definición de punto singular, se cumple lo que deseamos. □

**Proposición 1.1.3.** *Sea $A$ un operador sobre $\mathcal{H}$ y $\pi(A) \neq \emptyset$. Si $z \in \pi(A)$, entonces el operador $A - z : D(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ con $z \in \pi(A)$ es inyectiva.*

*Demostración.* Por definición existe $c_z > 0$ tal que

$$\|(A - z)x\| \geqslant c_z\|x\|, \text{ con } x \in D(A).$$

Si $x \in Ker(A - z)$, entonces

$$0 = \|(A - z)x\| \geqslant c_z\|x\| \Longrightarrow \|x\| = 0.$$

Por lo tanto, $Ker(A - z) = \{0\}$. □

**Proposición 1.1.4.** *Sean $A$ un operador cerrado sobre $\mathcal{H}$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces $A - z$ es cerrado.*

*Demostración.* Si $z = 0$ es trivial. Supongamos que $z \neq 0$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A - z)$ tal que $lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $lim_{n\to\infty}(A - z)x_n = y$ con $x, y \in \mathcal{H}$. Tenemos que $D(A - z) = D(A) \cap D(Iz) = D(A) \cap \mathcal{H} = D(A)$ y

$$\|Ax_n - zx - y\| \leqslant \|Ax_n - zx_n - y\| + \|zx_n - zx\|.$$

Como $lim_{n\to\infty} zx_n = zx$, haciendo $n \longrightarrow \infty$ en la desigualdad anterior obtenemos que $lim_{n\to\infty} Ax_n = zx + y$. Como $A$ es cerrado, entonces $x \in D(A) = D(A - z)$ y $(A - z)x = y$. En conclusión, $A - z$ es cerrado. □

El siguiente lema es necesario para la última proposición.

**Lema 1.1.1.** *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios lineales con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente. Supongamos que existen $\Phi : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ biyectiva y reales positivos $m_1$ y $m_2$ tales que, dado $x \in \mathcal{H}_1$*

$$m_1\|x\|_1 \leqslant \|\Phi(x)\|_2 \leqslant m_2\|x\|_1.$$

*Entonces la completes de $\mathcal{H}_1$ equivale a la completes de $\mathcal{H}_2$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{H}_1$ es completo. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_2$ de Cauchy. Como existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_1$ tal que $\Phi(x_n) = y_n$ para todo $n \in \{1, 2, ...\}$, entonces

$$\|x_n - x_m\|_1 \leqslant \frac{1}{m_1}\|y_n - y_m\|_2.$$

Haciendo $n, m \longrightarrow \infty$, tenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}_1$. Entonces existe $x \in \mathcal{H}_1$ tal que $lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sea $y = \Phi(x) \in \mathcal{H}_2$. Así,

$$\|y_n - y\|_2 \leqslant m_2\|x_n - x\|_1.$$

Haciendo $n \longrightarrow \infty$, obtenemos que $lim_{n\to\infty} y_n = y$. Por lo tanto, $\mathcal{H}_2$ es completo. La segunda impliación es análoga. □

**Proposición 1.1.5.** *Sea $A$ un operador sobre $\mathcal{H}$ tal que $0 \in \pi(A)$. Entonces $A$ es cerrado si y sólo si $Rg(A)$ es cerrado.*

*Demostración.* Sea $\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dada por $\Phi(x, y) = y$. Veamos que $\Phi$ es una biyección de $\mathcal{G}(A)$ a $Rg(A)$.

- Es sobreyectiva. Dado $Ax$ con $x \in D(A)$, tenemos que $(x, Ax) \in \mathcal{G}(A)$ y $\Phi(x, Ax) = Ax$.

- Es inyectiva. Sean $(x_1, Ax_1), (x_2, Ax_2) \in \mathcal{G}(A)$ tal que $Ax_1 = Ax_2$. Entonces

$$(x_1 - x_2, 0) = (x_1, Ax_1) - (x_2, Ax_2) \in \mathcal{G}(A) \Longrightarrow A(x_1 - x_2) = 0.$$

  Por la proposición 1.1.3, $A$ es inyectiva. Por lo tanto, $x_1 = x_2$.

Además, para $(x, Ax) \in \mathcal{G}(A)$ tenemos que por hipótesis $\|x\| \leqslant \frac{1}{c}\|Ax\|$ donda la $c$ cumple la definición 1.1.5. Como $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$, ocurre que

$$\|Ax\| \leqslant \|(x, Ax)\| \leqslant \|Ax\| + \frac{1}{c}\|Ax\| = \left(1 + \frac{1}{c}\right)\|Ax\|.$$

Por el lema anterior, $\mathcal{G}(A)$ es completo si y sólo si $Rg(A)$ lo es. Pero como son subespacios lineales de espacios de Hilbert, la completes equivale a ser cerrado. Por lo tanto, obtenemos lo que deseamos. □

Recordemos que si $A$ es densamente definido sobre $\mathcal{H}$, entonces

$$Rg(A \mp i)^{\perp} = Ker(A^* \pm i). \tag{1.1}$$

**Definición 1.1.6.** *Sea $A$ un operador simétrico y cerrado sobre $\mathcal{H}$. La transformada de Cayley de $A$ se define como el operador $U_A$ sobre $\mathcal{H}$ tal que*

$$U_A x = \begin{cases} (A-i)(A+i)^{-1}x & si \quad x \in Rg(A+i) \\ \\ 0 & si \quad x \in Rg(A+i)^{\perp} = Ker(A^* - i) \end{cases}$$

La definición anterior es consistente ya que por las proposiciones 1.1.2 y 1.1.3, $(A+i)^{-1}$ esta definido. Para estudiar algunas propiedades de la transformada de Cayley daremos las siguientes definiciones.

**Definición 1.1.7.** *Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Un operador $B : D(B) \subseteq \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ es unitario si es isométrico con las normas de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ y es sobreyectivo.*

**Observación**. Por la identidad de polarización, un operador unitario es una biyección que preserva el producto interior de $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$.

**Definición 1.1.8.** *Se dice que $A$ es una isometría parcial sobre $\mathcal{H}$ si existe un subespacio lineal cerrado $\mathcal{H}_1(A)$ de $\mathcal{H}$ tal que*

- $KerA = \mathcal{H}_1(A)^{\perp}$
- *La restricción $A\mid_{\mathcal{H}_1(A)}: \mathcal{H}_1(A) \longrightarrow \mathcal{H}_2(A)$ con $\mathcal{H}_2(A) = RgA\mid_{\mathcal{H}_1(A)}$ es un operador unitario.*

*Los espacios $\mathcal{H}_1(A)$ y $\mathcal{H}_2(A)$ se llamarán inicial y final respectivamente.*

Las propiedades que nos interesan aparecen en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.1.** *Sea $A$ un operador cerrado y simétrico. Entonces se cumplen los siguientes enunciados.*

*a) El operador $U_A$ es una isometría parcial sobre $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{H}_1(U_A) = Rg(A+i)$ y $\mathcal{H}_2(U_A) = Rg(A-i)$.*

*b) Sea $B$ un operador cerrado y simétrico sobre $\mathcal{H}$. Entonces*

$$B \supseteq A \textit{ si y sólo si } U_B \supseteq U_A.$$

*Demostración.* a) Por la proposición 1.1.4, $A+i$ es cerrado y por la proposición 1.1.5, $Rg(A+i)$ es cerrado. Veamos que $Ker\ U_A = Rg(A+i)^{\perp}$.

Sea $x \in \mathcal{H}$ tal que $x = a + b$ con $a \in Rg(A+i)$ y $b \in Rg(A+i)^{\perp}$ y suponemos que $U_A x = 0$. Entonces $(A-i)(A+i)^{-1}a = 0$. Luego, existe $y \in D(A)$ tal que $a = (A+i)y$. Entonces $(A-i)y = 0$ y por la proposición 1.1.3, $A-i$ es inyectiva. Entonces, $y = 0 \Longrightarrow a = 0$. Por lo tanto, $x = b \in Rg(A+i)^{\perp}$. En conclusión, $Ker\ U_A = Rg(A+i)^{\perp}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x \in Rg(A-i)(A+i)^{-1} &\iff \exists\, w \in Rg(A+i) \textit{ tal que } x = (A-i)(A+i)^{-1}w \\ &\iff \exists\, z \in D(A) \textit{ tal que } w = (A+i)z \;\wedge\; x = (A-i)z \\ &\iff x \in Rg(A-i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Rg\left(U_A\,|_{Rg(A+i)}\right) = Rg(A-i)$.

Falta demostrar que $U_A\,|_{Rg(A+i)}: Rg(A+i) \longrightarrow Rg(A-i)$ es isométrico. Sea $y = (A+i)x$ para algún $x \in D(A)$. Como $A$ es isométrico sobre $\mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned} \| U_A y \|^2 = \| (A-i)x \|^2 &= \langle (A-i)x, (A-i)x \rangle \\ &= \langle Ax, Ax \rangle + [-i\langle Ax, x\rangle + i\langle x, Ax\rangle] + \langle x, x\rangle \\ &= \langle Ax, Ax \rangle + [i\langle Ax, x\rangle - i\langle x, Ax\rangle] + \langle x, x\rangle \\ &= \langle (A+i)x, (A+i)x \rangle \\ &= \| y \|^2 . \end{aligned}$$

Por lo tanto, $U_A\,|_{Rg(A+i)}$ es unitario. En conclusión, $U_A$ es una isometría parcial sobre $\mathcal{H}$ si tomamos $\mathcal{H}_1(U_A) = Rg(A+i)$ y $\mathcal{H}_2(U_A) = Rg(A-i)$.

b) Supongamos que $B \supseteq A$. Si $x \in Rg(A+i)$, entonces existe $y \in D(A)$ tal que $x = (A+i)y$. Pero por hipótesis, $y \in D(B)$ y $x = (A+i)y = (B+i)y$. Entonces, $Rg(A+i) \subseteq Rg(B+i)$. Además,

$$\begin{aligned} U_A x = (A-i)(A+i)^{-1}x = (A-i)y &= (B-i)y \\ &= (B-i)(B+i)^{-1}(B+i)y \\ &= (B-i)(B+i)^{-1}x \\ &= U_B x. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $U_A \subseteq U_B$.

Supongamos que $U_A \subseteq U_B$ y sea $x \in D(A)$. Como $Rg(A+i) \subseteq Rg(B+i)$, existe $y \in D(B)$ tal que

$$(A+i)x = (B+i)y. \tag{1.2}$$

Como $U_A(A+i)x = U_B(A+i)x$, ocurre que

$$(A-i)x = (B-i)(B+i)^{-1}(A+i)x = (B-i)(B+i)^{-1}(B+i)y = (B-i)y. \quad (1.3)$$

De 1.3, tenemos que

$$(-A+i)x = (-B+i)y. \quad (1.4)$$

Sumando 1.2 con 1.4, tenemos $x = y \in D(B)$. Por lo tanto, $D(A) \subseteq D(B)$. Además, de 1.2 y 1.3 tenemos que $Ax = By = Bx$. En conclusión, $A \subseteq B$.

□

## 1.2. Teorema de extensiones de von Neumann

Consideraremos la siguiente definición.

**Definición 1.2.1.** *Un operador $A$ sobre $\mathcal{H}$ es cerrable si $\overline{\mathcal{G}(A)}$ es la gráfica de algún operador sobre $\mathcal{H}$.*

Si $A$ es cerrable, denotamos por $\overline{A}$ a la cerradura de $A$ como el operador sobre $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)}$. Entonces

$$D(\overline{A}) = \{x \in \mathcal{H} \mid \exists\, (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A) \textit{ tal que } lim_{n\to\infty} x_n = x \ \wedge (Ax_n)_{n=1}^{\infty} \textit{ converge en } \mathcal{H}\}$$

Además, $\overline{A}x = lim_{n\to\infty} Ax_n$ si $lim_{n\to\infty} x_n = x$. Notemos que $\overline{A}$ es cerrado y $\overline{A} \supseteq A$. Esa forma de extender operadores se genereliza en la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.1.** *Sean $A$ y $B$ operadores sobre $\mathcal{H}$. Entonces*

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B).$$

*Demostración.* Supongamos que $A \subseteq B$. Entonces

$$(x,y) \in \mathcal{G}(A) \Longrightarrow x \in D(A) \ \wedge \ y = Ax \Longrightarrow x \in D(B) \ \wedge \ y = Bx \Longrightarrow (x,y) \in \mathcal{G}(B).$$

Por lo tanto, $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B)$.

Supongamos que $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B)$. Entonces

$$x \in D(A) \Longrightarrow (x, Ax) \in \mathcal{G}(A) \Longrightarrow (x, Ax) \in \mathcal{G}(B) \Longrightarrow x \in D(B) \text{ y } Ax = Bx$$

Por lo tanto, $A \subseteq B$. □

Demostraremos el siguiente lema.

**Lema 1.2.1.** *Sea $\Gamma$ un subespacio lineal de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Entonces $\Gamma$ es la gráfica de algún operador si y sólo si se cumple lo siguiente*

$$(0,y) \in \Gamma \Longrightarrow y = 0. \quad (1.5)$$

*Demostración.* Si existe un operador $A$ sobre $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{G}(A) = \Gamma$, entonces

$$(0, y) \in \mathcal{G}(A) \Longrightarrow y = A(0) = 0.$$

Supongamos que se cumple 1.5. Definimos a $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $Tx = y$ si $(x, y) \in \Gamma$. Sean $(x_1, Tx_1), (x_2, Tx_2) \in \Gamma$.

- $T$ está bien definida. Supongamos que $x_1 = x_2$. Entonces tenemos que

$$(0, Tx_1 - Tx_2) = (x_1, Tx_1) - (x_2, Tx_2) \in \Gamma \Longrightarrow Tx_1 = Tx_2.$$

- Es lineal. Sea $(x_1 + x_2, T(x_1 + x_2)) \in \Gamma$. Entonces

$$(0, T(x_1 + x_2) - (Tx_1 + Tx_2)) = (x_1 + x_2, T(x_1 + x_2)) - (x_1, Tx_1) - (x_2, Tx_2) \in \Gamma$$
$$\Longrightarrow T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2.$$

  Sean $a \in \mathbb{C}$ y $(x, Tx) \in \Gamma$. Entonces

$$(ax, aTx), (ax, T(ax)) \in \Gamma \Longrightarrow (0, aTx - T(ax)) \in \Gamma \Longrightarrow T(ax) = aTx.$$

En conclusión, existe un operador lineal $T$ tal que $\mathcal{G}(T) = \Gamma$. □

Los operadores cerrables se caracterizarán de la siguiente forma.

**Proposición 1.2.2.** *Un operador $A$ sobre $\mathcal{H}$ es cerrable si y sólo si existe una extensión cerrada de $A$.*

*Demostración.* Si $A$ es cerrable, entonces por definición existe $\overline{A}$ y $\overline{A} \supseteq A$.
Supongamos que existe un operador cerrado $B$ sobre $\mathcal{H}$ tal que $A \subseteq B$. Por la proposición 1.2.1 tenemos que

$$\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow \overline{\mathcal{G}(A)} \subseteq \overline{\mathcal{G}(B)} = \mathcal{G}(B)$$

Sea $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(A)}$. Como $(0, y) \in \mathcal{G}(B)$, por el lema anterior $y = 0$. Volviendo a aplicar el lema, $\overline{\mathcal{G}(A)}$ es la gráfica de algún operador y por definición $A$ es cerrable. □

El siguiente resultado es necesario para obtener una propiedad importante de los operadores simétricos mediante la caracterización de cerrabilidad de operadores.

**Proposición 1.2.3.** *Si $A$ es un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$, entonces $A^*$ es cerrado en $\mathcal{H}$.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A^*)$ tal que $lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $lim_{n\to\infty} A^* x_n = y$. Dado $w \in D(A)$,

$$\langle Aw, x\rangle = lim_{n\to\infty}\langle Aw, x_n\rangle = lim_{n\to\infty}\langle w, A^* x_n\rangle = \langle w, y\rangle.$$

Entonces $x \in D(A^*)$ y $\langle w, A^* x\rangle = \langle w, y\rangle$. Como $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, para $v \in \mathcal{H}$ existe $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A)$ tal que $lim_{n\to\infty} w_n = v$. Así,

$$\langle v, A^* x\rangle = lim_{n\to\infty}\langle w_n, A^* x\rangle = lim_{n\to\infty}\langle w_n, y\rangle = \langle v, y\rangle.$$

Por lo tanto, $A^* x = y$. Luego, $A^*$ es cerrado en $\mathcal{H}$. □

A continuación mostraremos enunciados que son de relevancia pues nos ayudarán a probar el Teorema de extensiones de von Neumann. El primero es inmediato ya que si $A$ es un operador simétrico sobre $\mathcal{H}$, por la definición 1.1.3 y las proposiciones 1.2.2 y 1.10 tenemos que $A$ es cerrable.

**Corolario 1.2.1.** *Todo operador simétrico sobre $\mathcal{H}$ es cerrable.*

**Nota**. Otra forma de demostrarlo es definiendo el operador $W : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dado por $W(x, y) = (-y, x)$ el cual claramente es unitario con la norma de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ y con el siguiente resultado ([1, Lemma 1.10]).

**Proposición 1.2.4.** *Sea $A$ un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Entonces*

$$\mathcal{G}(A^*) = W\mathcal{G}(A)^\perp = W\left[\mathcal{G}(A)^\perp\right].$$

Sea $I_{2\times 2}$ la matriz identidad $2 \times 2$ sobre $\mathbb{C}$. Como $W^2 = -I_{2\times 2}$ tenemos que

$$\mathcal{G}(A^{**}) = W\mathcal{G}(A^*)^\perp = \left[W^2[\mathcal{G}(A)]^\perp\right]^\perp = \left[\mathcal{G}(A)^\perp\right]^\perp = \overline{\mathcal{G}(A)}.$$

Por lo tanto, por definición $A$ es cerrable y por la proposición 1.2.1, $A^{**} = \overline{A}$.

El segundo resultado importante es el siguiente.

**Teorema 1.2.1.** *Si el operador $A$ sobre $\mathcal{H}$ es cerrable, entonces $\overline{A}$ es una extensión cerrada minimal de $A$.*

*Demostración.* Por la proposición 1.2.2, existe un operador $B$ cerrado sobre $\mathcal{H}$ tal que $B \supseteq A$. Por la proposición 1.2.1 y por definición de cerrable tenemos que

$$\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B) \Longrightarrow \mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)} \subseteq \overline{\mathcal{G}(B)} = \mathcal{G}(B) \Longrightarrow \overline{A} \subseteq B.$$

En conclusión, se cumple el enunciado.

□

La siguiente definición es un concepto muy relevante en este trabajo.

**Definición 1.2.2.** *Le llamaremos índices de deficiencia de un operador $A$ sobre $\mathcal{H}$ al par $(d_+(A), d_-(A))$ donde*

$$d_\pm(A) = dim\ Rg(A \mp i)^\perp.$$

Si $A$ es densamente definido sobre $\mathcal{H}$, por la igualdad 1.1

$$d_\pm(A) = dim\ Ker(A^* \pm i).$$

Denotaremos como $\dot{+}$ a la suma directa de subespacios lineales y por $\oplus$ a la suma ortogonal. También usaremos la siguiente notación para el operador $A$ a menos que se indique lo contrario

$$K_{\pm} = Rg(A \pm i)^{\perp} = Ker(A^* \mp i). \tag{1.6}$$

Notemos que

$$a \in Ker(A^* \mp i) \Longrightarrow A^* a = \pm i.$$

Tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.5.** *Sea $A$ un operado simétrico cerrado sobre $\mathcal{H}$. Entonces*

$$D(A^*) = D(A) \dot{+} K_+ \dot{+} K_-. \tag{1.7}$$

*Demostración.* Sea $x \in D(A^*)$. Por la proposiciones 1.1.4 y 1.1.5, $Rg(A+i)$ es cerrado. Por el teorema de proyección en espacios de Hilbert, $\mathcal{H} = Rg(A+i) \oplus Rg(A+i)^{\perp}$. Entonces $(A^* + i)x = (A+i)x_0 + w$ con $x_0 \in D(A)$ y $w \in K_+$. Sea $u_+ = -\frac{i}{2} w \in K_+$. Como $A$ es simétrico, $x_0 \in D(A^*)$. Entonces $x - x_0 - u_+ \in D(A^*)$. Luego,

$$\begin{aligned}
(A^* + i)(x - x_0 - u_+) &= (A^* + i)x - (A^* + i)(x_0 + u_+) \\
&= (A + i)x_0 + w - A^*(x_0 + u_+) - ix_0 - iu_+ \\
&= Ax_0 + w - Ax_0 - iu_+ - iu_+ = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x - x_0 - u_+ \in K_-$. Si escogemos $u_- = x - x_0 - u_+$, entonces

$$x = x_0 + u_+ + u_- \in D(A) + K_+ + K_-.$$

Claramente, $D(A) + K_+ + K_- \subseteq D(A^*)$. Por lo tanto, $D(A) + K_+ + K_- = D(A^*)$. Supongamos que existen $y_0 \in D(A)$ y $v_{\pm} \in K_{\pm}$ tales que $x = y_0 + v_+ + v_-$. Entonces $(y_0 - x_0) + (v_+ - u_+) + (v_- - u_-) = 0$. Como $A^*(v_{\pm} - u_{\pm}) = \pm i(v_{\pm} - u_{\pm})$, tenemos que

$$0 = (A^* + i)\left[(y_0 - x_0) + (v_+ - u_+) + (v_- - u_-)\right] = (A + i)(y_0 - x_0) + 2i(v_- - u_-).$$

De la igualdad anterior tenemos que $(A+i)(y_0 - x_0) \in K_-$ y $v_- - u_- \in Rg(A+i)$. Pero como $K_- \cap Rg(A+i) = \{0\}$, entonces $(A+i)(y_0 - x_0) = v_- - u_- = 0$. Por las proposiciones 1.1.2 y 1.1.3, ocurre que $y_0 = x_0$. Luego, $v_+ = u_+$. En conclusión, obtenemos la expresión 1.7. $\square$

**Corolario 1.2.2.** *Sean $x_0 \in D(A)$, $u_{\pm} \in K_{\pm}$ y $A$ como en la proposición anterior. Entonces*

$$A^*\left(x_0 + u_+ + u_-\right) = Ax_0 + iu_+ - iu_-. \tag{1.8}$$

*Además*

$$Im\langle x_0 + u_+ + u_-, A^*\left(x_0 + u_+ + u_-\right)\rangle = \|u_+\|^2 - \|u_-\|^2. \tag{1.9}$$

*Demostración.* Claramente $A^*(x_0 + u_+ + u_-) = Ax_0 + iu_+ - iu_-$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle x_0 + u_+ + u_-, Ax_0 + iu_+ - iu_- \rangle &= \langle x_0, Ax_0 \rangle + \langle Ax_0, u_+ \rangle + \langle Ax_0, u_- \rangle \\
&+ \langle u_+, Ax_0 \rangle + i\langle u_+, u_+ \rangle - i\langle u_+, u_- \rangle \\
&+ \langle u_-, Ax_0 \rangle + i\langle u_-, u_+ \rangle - i\langle u_-, u_- \rangle \\
&= \langle x_0, Ax_0 \rangle + 2Re\langle Ax_0, u_+ \rangle + 2Re\langle Ax_0, u_- \rangle \\
&+ 2Re(i\langle u_-, u_+ \rangle) + i\left[\|u_+\|^2 - \|u_-\|^2\right].
\end{aligned}$$

Por la proposición 1.1.1, $\langle x_0, Ax_0 \rangle \in \mathbb{R}$. Luego, obtenemos 1.9. □

El siguiente resultado (ver [7, Theorem 10.3-6]) es necesario para demostrar el Teorema de extensiones de von Neumann.

**Proposición 1.2.6.** *Sea $A$ un operador simétrico sobre $\mathcal{H}$. Entonces $(\overline{A})^* = A^*$.*

También mencionamos el siguiente lema.

**Lema 1.2.2.** *Sean $X$ e $Y$ subespacios lineales de $\mathcal{H}$. Entonces*

$$(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp.$$

*Si $X$ e $Y$ son cerrados, entonces*

$$(X \cap Y)^\perp = \overline{X^\perp + Y^\perp}.$$

*Demostración.* Sea $w \in (X+Y)^\perp$. Entonces para todo $a \in X \subseteq X+Y$ y $b \in Y \subseteq X+Y$, $\langle w, a \rangle = 0 = \langle w, b \rangle$. Luego, $w \in X^\perp \cap Y^\perp$. Por otro lado, supongamos que $v \in X^\perp \cap Y^\perp$ y $c \in X+Y$. Entonces $c = a+b$ con $a \in X$ y $b \in Y$ y por lo tanto, $\langle v, c \rangle = \langle v, a \rangle + \langle v, b \rangle = 0$. Por lo tanto, $(X+Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.
Sean $w \in X \cap Y = X^{\perp\perp} \cap Y^{\perp\perp}$ y $x \in X^\perp + Y^\perp$. Entonces existen $a \in X^\perp$ y $b \in Y^\perp$ tales que $x = a+b$. Luego, $\langle w, x \rangle = \langle w, a \rangle + \langle w, b \rangle = 0$. Por lo tanto, $w \in \left(X^\perp + Y^\perp\right)^\perp$. Por otra parte, supongamos que $v \in \left(X^\perp + Y^\perp\right)^\perp$. Entonces $v \in \left(X^\perp + \{0\}\right)^\perp = X^{\perp\perp} = X$ y $v \in \left(\{0\} + Y^\perp\right)^\perp = Y^{\perp\perp} = Y$. Por lo tanto, $X \cap Y = \left(X^\perp + Y^\perp\right)^\perp$ e inmediatamente tenemos la segunda igualdad. □

Sean $\mathcal{B}$ el conjuto de las extensiones cerradas simétricas de $A$ y $\mathcal{V}$ el conjunto de isometrias parciales de $K_+$ a $K_-$.

**Teorema 1.2.2** (Teorema de extensiones de von Neumann)**.** *Sea $A$ un operador simétrico sobre $\mathcal{H}$. Existe una biyección entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{V}$ dada por*

$$U_B = U_{\overline{A}} - V \text{ con } B \in \mathcal{B} \text{ y } V \in \mathcal{V}. \tag{1.10}$$

*Además, todo $B \in \mathcal{B}$ es de la forma*

$$B = A^*|_{D(B)} \text{ con } D(B) = D(\overline{A}) \dotplus (I+V)\mathcal{H}_1(V) \text{ y } V \in \mathcal{V}. \tag{1.11}$$

*Demostración.* Supongamos que $A$ es cerrado. Entonces $\overline{A} = A$. Sean $V \in \mathcal{V}$ y $B$ un operador dado por 1.11 el cual esta bien definido pues

$$D(A) \dotplus (I+V)\mathcal{H}_1(V) \subseteq D(A) \dotplus K_+ \dotplus K_- = D(A^*).$$

Sean $x \in D(A)$ y $w \in \mathcal{H}_1(V)$. Por la expresión 1.9 y como $V$ es una isometría de $K_+$ a $K_-$, tenemos que

$$Im\langle x+w+Vw, A^*(x+w+Vw)\rangle = \|w\|^2 - \|Vw\|^2 = \|w\|^2 - \|w\|^2 = 0.$$

Por lo tanto, $\langle x+w+Vw, A^*(x+w+Vw)\rangle \in \mathbb{R}$. Como $D(A) \subseteq D(B)$, $B$ es densamente definido. Por la proposición 1.1.1, $B$ es simétrico y claramente $A \subseteq B$.

Por 1.8 tenemos que

$$(B+i)(x+w+Vw) = Ax+iw-iVw+ix+iw+iVw = (A+i)x+2iw \tag{1.12}$$

y

$$(B-i)(x+w+Vw) = Ax+iw-iVw-ix-iw-iVw = (A-i)x-2iVw. \tag{1.13}$$

Veamos que $B$ es cerrado en $\mathcal{H}$. Afirmamos que

$$Rg(B+i) = Rg(A+i) \oplus \mathcal{H}_1(V). \tag{1.14}$$

Por la igualdad 1.12, $Rg(B+i) \subseteq Rg(A+i) + \mathcal{H}_1(V)$. Además,

$$(A+i)x+w = (A+i)x + 2i\left(\frac{w}{2i}\right) = (B+i)\left[x + \frac{w}{2i} + V\left(\frac{w}{2i}\right)\right].$$

Por lo tanto, $Rg(B+i) = Rg(A+i) \oplus \mathcal{H}_1(V)$.
Afirmamos que $Rg(B+i)$ es cerrado. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Rg(B+i)$ tal que $lim_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces existen $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Rg(A+i)$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}_1(V)$ tales que $x_n = a_n + b_n$ para todo $n$. Como la suma es ortogonal, tenemos que

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|a_n + b_n - a_m - b_m\|^2 = \|a_n - a_m\|^2 + \|b_n - b_m\|^2.$$

Entonces

$$\|a_n - a_m\| \leqslant \|x_n - x_m\| \text{ y } \|b_n - b_m\| \leqslant \|x_n - x_m\|.$$

Como $x_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$, obtenemos que $a_n$ y $b_n$ son sucesiones de Cauchy en $\mathcal{H}$. Por las proposiciones 1.1.5 y 1.1.4 y el teorema 1.1.1, tenemos que $Rg(A+i)$ y $\mathcal{H}_1(V)$ son cerrados. Entonces , por completes de $\mathcal{H}$ existen $a \in Rg(A+i)$ y $b \in \mathcal{H}_1(V)$ tales que $lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $lim_{n\to\infty} b_n = b$. Así,

$$x = lim_{n\to\infty} x_n = lim_{n\to\infty} a_n + lim_{n\to\infty} b_n = a + b \in Rg(B+i).$$

Luego, por las proposiciones 1.1.5 y 1.1.4 tenemos que $B$ es cerrado.

Por la definición 1.1.6, existe $U_B$. Si aplicamos 1.13 a $(B+i)(x+w+Vw) \in Rg(B+i)$ tenemos que

$$U_B(B+i)(x+w+Vw) = (B-i)(x+w+Vw) = (A-i)x - 2iVw = U_A(A+i)x - V(2iw).$$

Por lo tanto, $U_B = U_A - V$.

Sea $B \in \mathcal{B}$. Como $A \subseteq B$, por el teorema 1.1.1 $U_A \subseteq U_B$. Entonces podemos definir a $\dot{V} = U_B - U_A$. Por la definición 1.1.6 tenemos que

$$\dot{V}x = \begin{cases} 0 & si \quad x \in Rg(A+i) \\ \\ U_Bx & si \quad x \in K_+ = Rg(A+i)^\perp \end{cases}.$$

Afirmamos que $Ker\ \dot{V} = Ker\ U_B + Rg(A+i)$. Si $x \in Ker\ \dot{V}$, entonces $\dot{V}x = 0$ y sea $x = c + d$ con $c \in K_+$ y $d \in Rg(A+i)$. Luego,

$$0 = \dot{V}(c+d) = U_Bc \Longrightarrow c \in Ker\ U_B \Longrightarrow x \in Ker\ U_B + Rg(A+i).$$

Sea $x \in Ker\ U_B + Rg(A+i)$. Entonces existen $a \in Ker\ U_B$ y $b \in Rg(A+i)$ tales que $x = a + b$. Como $Ker\ U_B = Rg(B+i)^\perp \subseteq K_+$, tenemos que

$$\dot{V}x = \dot{V}a + \dot{V}b = \dot{V}a = U_Ba = 0 \Longrightarrow x \in Ker\ \dot{V}.$$

Como $U_A$ y $U_B$ son acotados en $\mathcal{H}$ por ser isometrías parciales, concluimos que $\dot{V}$ también lo es. Por lo tanto, $Ker\ \dot{V}$ es cerrado en $\mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{H}_1(\dot{V}) = Rg(B+i) \cap K_+$ el cual es un subespacio lineal cerrado. Sea $\mathcal{H}_2(\dot{V}) = Rg\ \dot{V}|_{\mathcal{H}_1(\dot{V})}$. Si $x \in \mathcal{H}_1(\dot{V})$, entonces $\dot{V}x = U_Bx$. Como $U_B|_{Rg(B+i)} : Rg(B+i) \longrightarrow Rg(B-i)$ es isométrico, entonces

$$\|\dot{V}x\| = \|U_Bx\| = \|x\|.$$

Por lo tanto, $\dot{V}|_{\mathcal{H}_1(\dot{V})} : \mathcal{H}_1(\dot{V}) \longrightarrow \mathcal{H}_2(\dot{V})$ es unitario. Por el lema 1.2.2 y como $A$ es cerrado

$$\mathcal{H}_1(\dot{V})^\perp = \overline{Rg(B+i)^\perp + K_+^\perp} = \overline{Ker\ U_B + \overline{Rg(A+i)}} = \overline{Ker\ U_B + Rg(A+i)} = Ker\ \dot{V}.$$

Por lo tanto, $\dot{V}$ es una isometría parcial sobre $\mathcal{H}$ y claramente $\mathcal{H}_1(\dot{V}) \subseteq K_+$.
Veamos que $\mathcal{H}_2(\dot{V}) \subseteq K_-$. Si $z \in \mathcal{H}_2(\dot{V})$, entonces existe $x \in \mathcal{H}_1(\dot{V})$ tal que $z = \dot{V}x = U_Bx \in Rg(B-i)$. Entonces existe $y \in D(B)$ tal que $z = U_Bx = (B-i)y$. Además, como $B-i$ es inyectivo por las proposiciones 1.1.2 y 1.1.3 ocurre que

$$(B-i)y = U_Bx = (B-i)(B+i)^{-1}x \Longrightarrow y = (B+i)^{-1}x \Longrightarrow x = (B+i)y.$$

Como $y \in D(A^*)$ y $x \in K_+ = Ker(A^* - i)$ tenemos que $z = (B-i)y = (B+i)y - 2iy \in D(A^*)$. Además,

$$A^*x = ix \Longrightarrow A^*(B+i)y = i(B+i)y \Longrightarrow A^*By + iA^*y = iBy - y.$$

Como $y \in D(B)$ y $B \subseteq A^*$, entonces $iA^*y = iBy$. Eliminando términos en la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} A^*By = -y &\Longrightarrow A^*By - iA^*y = -iBy - y \\ &\Longrightarrow A^*(B-i)y = -i(B-i)y \\ &\Longrightarrow A^*z = -iz \\ &\Longrightarrow z \in Ker(A^* + i) = K_-. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot{V} \in \mathcal{V}$. Finalmente, tomamos $V = -\dot{V}$ el cual cumple que

$$V \in \mathcal{V} \text{ y } U_B = U_A - V.$$

Supongamos que al operador $V$ le corresponde $B_V \in \mathcal{B}$. Por lo demostrado en la primera parte, $U_{B_V} = U_A - V$. Entonces $U_B = U_{B_V}$ y por el teorema 1.1.1, $B = B_V$.

En conclusión, todas las extensiones en $\mathcal{B}$ son de la forma 1.11 y los conjuntos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{V}$ son biyectivos.
Si $A$ no es cerrado, por el corolario 1.2.1 y el teorema 1.2.1, podemos considerar $\overline{A}$ en lugar de $A$. Además, por la proposición 1.2.6 podemos tomar a $B$ como en 1.11 y

$$Rg(\overline{A} \pm i)^{\perp} = Ker((\overline{A})^* \mp i) = Ker(A^* \mp i) = K_{\pm}.$$

Por lo tanto, concluimos la demostración. □

**Corolario 1.2.3.** *Sea $A$ un operador como en el teorema anterior. Supongamos que $B \in \mathcal{B}$ se corresponde con $V \in \mathcal{V}$. Entonces $B$ es autoadjunto si y sólo si $V$ es unitario de $K_+$ a $K_-$.*

*Demostración.* Sean $x \in D(A)$ y $w \in \mathcal{H}_1(V)$. Veamos que

$$Rg(B-i) = Rg(A-i) \oplus \mathcal{H}_2(V). \tag{1.15}$$

Por la igualdad 1.13, $Rg(B-i) \subseteq Rg(A-i) + \mathcal{H}_2(V)$. También,

$$(A-i)x + Vw = (A-i)x - 2iV\left(\frac{w}{-2i}\right) = (B-i)\left[x + \frac{w}{-2i} + V\left(\frac{w}{-2i}\right)\right].$$

Por lo tanto, $Rg(B-i) = Rg(A-i) \oplus \mathcal{H}_2(V)$. Por la igualdad anterior, el criterio de autoadjuntes y la igualdad 1.14, $B$ es autoadjunto en $\mathcal{H}$ si y sólo si

$$\mathcal{H} = Rg(A+i) \oplus \mathcal{H}_1(V) \text{ y } \mathcal{H} = Rg(A-i) \oplus \mathcal{H}_2(V).$$

Lo anterior es equivalente a que $K_+ = \mathcal{H}_1(V)$ y $K_- = \mathcal{H}_2(V)$ y por definición $V$ es unitario. □

# Capítulo 2

# Perturbaciones singulares de rango uno

## 2.1. Estabilidad de valores propios

Sea $A$ un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$. Las perturbaciones de rango uno se definen como

$$A_\alpha = A + \alpha\langle\varphi, \cdot\rangle\varphi \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{H}$, la perturbación es acotada. En caso contrario, será una pertubación singular. El segundo caso es el que nos interesa.
Sea $\varphi : D(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional. Definimos al operador $\widehat{A}$ sobre $\mathcal{H}$ tal que $D(\widehat{A}) = Ker\ \varphi$ y $\widehat{A}|_{D(\widehat{A})} = A$. La siguiente es una condición para que el operador $\widehat{A}$ sea simétrico y es una reformulación de [5, Lemma 2.1].

**Proposición 2.1.1.** *Sea $\varphi \neq 0$. Entonces el funcional $\varphi$ es no acotado si y sólo si $Ker\varphi$ es denso en $\mathcal{H}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\varphi$ es no acotado. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos

$$B_n = \{x \in D(A) : |\varphi(x)| > n\|x\|\}$$

los cuales son no vacíos por hipótesis. Es claro que $0 \notin B_n$, para todo $n$. Entonces tomo $x_n \in B_n$ y además

$$|\varphi(x_n)| > n\|x_n\| \Longrightarrow |\ \varphi\,(y_n)\ | > n \text{ con } y_n = \tfrac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Por lo tanto, existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D(A)$ tal que $|\varphi(y_n)| \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y $\|y_n\| = 1$ para todo $n$.
Sea $y \in D(A)$. Como $\varphi(y_n) \neq 0$ para todo $n$, tenemos que

$$y = y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(y_n)}y_n + \frac{\varphi(y)}{\varphi(y_n)}y_n.$$

Claramente $y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(y_n)} y_n \in Ker\varphi$. Dado $w \in Ker\varphi^{\perp}$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle w, y\rangle| = \left| \left\langle w, y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(y_n)} y_n \right\rangle + \left\langle w, \frac{\varphi(y)}{\varphi(y_n)} y_n \right\rangle \right| &= \left| \left\langle w, \frac{\varphi(y)}{\varphi(y_n)} y_n \right\rangle \right| \\ &\leqslant \|w\| \left\| \frac{\varphi(y)}{\varphi(y_n)} y_n \right\| \\ &= \|w\| \frac{|\varphi(y)|}{|\varphi(y_n)|} \end{aligned}$$

Si $n \longrightarrow \infty$, entonces $\langle w, y\rangle = 0$. Por lo tanto, $y \in Ker\varphi^{\perp\perp}$. Es decir, $D(A) \subseteq \overline{Ker\varphi}$. Como $A$ es autoadjunto en particular es densamente definido. Por lo tanto, $\mathcal{H} = \overline{Ker\varphi}$.
Si $\mathcal{H} = \overline{Ker\varphi}$ y $\varphi$ es acotado, entonces $Ker\varphi = \mathcal{H}$ y por lo tanto $\varphi = 0$ lo que es una contradicción.
En conclusión, tenemos la equivalencia. $\square$

Como $\widehat{A} \subseteq A$, entonces $\widehat{A}^* \supseteq A^* = A$. Deducimos el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.1.** *Si el funcional $\varphi$ es no acotado, entonces $\widehat{A}$ es una restricción simétrica de $A$.*

Por el criterio de autoadjuntes $D[(A \pm i)^{-1}] = \mathcal{H}$. Definimos los funcionales $J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $J = \varphi(A+i)^{-1}$ y $J' : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ como $J' = \varphi(A-i)^{-1}$ los cuales están bien definidos por la proposición 1.1.2. Entonces tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.2.** *Los funcionales $J$ y $J'$ son idénticamente $0$ si y sólo si $\widehat{A}$ es autoadjunto.*

*Demostración.* Sea $x \in \mathcal{H}$. Entonces

$$x \in KerJ \Longleftrightarrow Jx = \varphi(A+i)^{-1}x = 0 \Longleftrightarrow (A+i)^{-1}x \in Ker\varphi.$$

Sea $(A+i)^{-1}x \in Ker\varphi$. Como $Ker\varphi = D(\widehat{A})$, tenemos que $x = (\widehat{A}+i)(A+i)^{-1}x \in Rg(\widehat{A}+i)$, pues $\widehat{A} \subseteq A$. Por otro lado, si $x \in Rg(\widehat{A}+i)$, existe $y \in D(\widehat{A})$ tal que $x = (\widehat{A}+i)y = (A+i)y$. Por la porposición 1.1.2, $(A+i)^{-1}x = y \in D(\widehat{A}) = Ker\varphi$. Entonces

$$(A+i)^{-1}x \in Ker\varphi \Longleftrightarrow x \in Rg(\widehat{A}+i).$$

Por lo tanto, $KerJ = Rg(\widehat{A}+i)$. Análogamente, tenemos que $Ker\ J' = Rg(\widehat{A}-i)$.

Que los funcionales sean idénticamente 0 es equivalente a que $Ker\ J = \mathcal{H} = Ker\ J'$. Pero como $Ker\ J = Rg(\widehat{A}+i)$ y $Ker\ J' = Rg(\widehat{A}-i)$, por el criterio de autoadjuntes concluimos que $\widehat{A}$ es autoadjunto. $\square$

Por la proposición anterior podemos considerar que el funcional $J$ no es idénticamente 0. Para $D \subseteq \mathcal{H}$ denotamos por $genD$ al subespacio generado por $D$. Si $D$ es un subespacio lineal, denotamos su espacio dual como $D^*$. El siguiente resultado es una modificación de [4, Lemma 1.2.3].

**Proposición 2.1.3.** *Supongamos que $\varphi$ es no acotado, $J \in \mathcal{H}^*$ y que no son idénticamente* $0$. *Entonces $\widehat{A}$ tiene índices de deficiencia* $(1,1)$.

*Demostración.* De la prueba del resultado anterior tenemos que $KerJ = Rg(\widehat{A}+i)$. Por el teorema de Riesz, existe $\lambda \in \mathcal{H} = D(J)$ tal que $J = \langle \lambda, \cdot \rangle$. Entonces $KerJ = \{v \in \mathcal{H} : \langle \lambda, v \rangle = 0\}$. Además,

$$v \in gen\{\lambda\}^{\perp} \iff \forall\, z \in \mathbb{C}, \langle v, z\lambda \rangle = 0 = \langle v, \lambda \rangle.$$

Por lo tanto, $gen\{\lambda\}^{\perp} = \{v \in \mathcal{H} : \langle \lambda, v \rangle = 0\}$. Como todo subespacio lineal de dimensión finita es cerrado, tenemos que

$$gen\{\lambda\} = gen\{\lambda\}^{\perp\perp} = \{v \in \mathcal{H} : \langle \lambda, v \rangle = 0\}^{\perp} = KerJ^{\perp} = Rg(\widehat{A}+i)^{\perp}.$$

Por lo tanto, $d_+(\widehat{A}) = 1$. Como $\widehat{A}$ es simétrico y $A$ es una extensión autoadjunta, por el corolario 1.2.3, existe un operador unitario entre $Rg(\widehat{A}+i)^{\perp}$ y $Rg(\widehat{A}-i)^{\perp}$. En conclusión, los índices de deficiencia de $\widehat{A}$ son $(1,1)$.

□

Por la igualdad $Ker\ J = Rg(\widehat{A}+i)$ y las proposiciones 1.1.2, 1.1.5 y 1.1.4 tenenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.2.** *Si $J \in \mathcal{H}^*$, entonces la restricción $\widehat{A}$ es un operador cerrado sobre $\mathcal{H}$.*

Sea $A$ un operador simétrico con índices de deficiencia $(1,1)$. Existirán $u_\pm \in K_\pm$ tales que $K_\pm = gen\{u_\pm\}$. Además, como $gen\{u\} = gen\left\{\frac{u}{\|u\|}\right\}$, podemos considerar que $\|u_\pm\| = 1$. Para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ definimos a los operadores $V_\theta : K_+ \longrightarrow K_-$ como $V_\theta u_+ = e^{\theta i} u_-$. Queremos encontrar extensiones autoadjuntas para un operador simétrico con índices de deficiencia $(1,1)$. Para ello demostramos el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.4.** *Los operadores $V_\theta$ son unitarios, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Además, toda operador unitario de $K_+$ a $K_-$ es de esa forma.*

*Demostración.* Sea $\theta \in [0, 2\pi)$ y $c \in \mathbb{C}$. Veamos que $V_\theta$ es unitario.

- Es sobreyectivo. Dado $cu_- \in K_-$, tomo $ce^{-\theta i}u_+ \in K_+$ y cumple que $V_\theta(ce^{-\theta i}u_+) = ce^{-\theta i}e^{\theta i}u_- = cu_-$.

- Es isométrico. Tenemos que, $\|V_\theta(cu_+)\| = |c|\ \|u_-\| = |c| = \|cu_+\|$ .

Por lo tanto, $V_\theta$ es unitario.
Sea $V : K_+ \longrightarrow K_-$ un operador unitario. Entonces existe $d \in \mathbb{C}$ tal que $Vu_+ = du_-$. Como $V$ es una isometría tenemos que

$$1 = \|u_+\| = \|Vu_+\| = \|du_-\| = |d|.$$

Entonces existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $d = e^{\theta i}$. Por lo tanto, $V = V_\theta$ para algún $\theta \in [0, 2\pi)$. □

Por el corolario 1.2.3 concluimos lo siguiente.

**Corolario 2.1.3.** *Todo operador simétrico con índices de deficiencia* $(1, 1)$ *tiene extensiones autoadjuntas* $R_\theta$ *para todo* $\theta \in [0, 2\pi)$.

En el siguiente teorema (ver [8, Section 2]) se estudia el comportamiento de los valores propios de las extensiones $R_\theta$.

**Teorema 2.1.1.** *Sean* $A$ *un operador simétrico con índices de deficiencia* $(1, 1)$*,* $R_\theta$ *sus extensiones autoadjuntas con* $\theta \in [0, 2\pi)$ *dadas por el corolario anterior y* $a \in \mathbb{R}$*. Entonces* $a$ *es valor propio de* $R_\theta$ *para todo* $\theta \in [0, 2\pi)$ *ó a lo más para uno.*

*Demostración.* Vamos a probar que si $a$ no es valor propio de $R_\theta$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces lo es a lo más para un $\theta \in [0, 2\pi)$.
Supongamos que existen $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ tales que $a$ no es valor propio de $R_\alpha$ pero si de $R_\gamma$ y $R_\beta$. Por las proposiciones 1.1.2 y 1.1.3, $(R_\alpha - i)^{-1}$ existe y por el criterio de autoadjuntes, $Rg(R_\alpha - i) = \mathcal{H}$. Entonces definimos la composición

$$(R_\alpha - a)(R_\alpha - i)^{-1} : Ker(A^* - a) \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Observemos que $A^* \supseteq R_\theta$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Sean $x \in Ker(A^* - a)$ e $y \in D(A)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle (R_\alpha - a)(R_\alpha - i)^{-1}x, (A + i)y\rangle &= \langle (R_\alpha - i + i - a)(R_\alpha - i)^{-1}x, (A + i)y\rangle \\
&= \langle x + (i - a)(R_\alpha - i)^{-1}x, (A + i)y\rangle \\
&= \langle x, (A + i)y\rangle + \langle (i - a)(R_\alpha - i)^{-1}x, (A + i)y\rangle \\
&= \langle x, (A - a + a + i)y\rangle + \langle (i - a)(A^* - i)(R_\alpha - i)^{-1}x, y\rangle \\
&= \langle x, (A - a)y\rangle + \langle x, (a + i)y\rangle \\
&+ \langle (i - a)(R_\alpha - i)(R_\alpha - i)^{-1}x, y\rangle \\
&= \langle x, (A - a)y\rangle + (a + i)\langle x, y\rangle + (-i - a)\langle x, y\rangle \\
&= \langle x, (A - a)y\rangle = \langle (A^* - a)x, y\rangle = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Rg(R_\alpha - a)(R_\alpha - i)^{-1} = Rg(A + i)^\perp = Ker(A^* - i)$. Como $(R_\alpha - a)(R_\alpha - i)^{-1}$ es una biyección de $Ker(A^* - a)$ a $Ker(A^* - i)$, entonces existe una aplicación lineal biyectiva $\Upsilon : Ker(A^* - i) \longrightarrow Ker(A^* - a)$. Por el teorema de la dimensión tenemos que

$$dim\ Ker(A^* - i) = dim\ Ker\ \Upsilon + dim\ Rg\ \Upsilon = dim\{0\} + dim\ Ker(A^* - a)$$

Por lo tanto, $dim\ Ker(A^* - a) = dim\ Ker(A^* - i) = 1$ pues $A$ tiene índices de deficiencia $(1, 1)$.

Sabemos que $Ker(R_\theta - a) \subseteq Ker(A^* - a)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Dados $\widehat{x} \in Ker(R_\beta - a)$ y $y \in Ker(R_\gamma - a)$, existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $k\widehat{x} = y$. Hacemos $x = k\widehat{x}$. Como $x \in D(R_\beta)$

y $y \in D(R_\gamma)$, por el Teorema de Extensiones de von Neumann existen $x_0, y_0 \in D(A)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ y $u_\pm \in K_\pm$ tales que

$$x = x_0 + c_1 u_+ + c_1 e^{\beta i} u_- \ , \ y = y_0 + c_2 u_+ + c_2 e^{\gamma i} u_-.$$

Como las sumas son directas y $x = y$, tenemos que

$$x_0 = y_0 \text{ y } (c_1 - c_2)u_+ + (c_1 e^{\beta i} - c_2 e^{\gamma i})u_- = 0.$$

Si $u_+$ y $u_-$ fueran linealmente dependientes, entonces $K_+ = K_-$. Luego,

$$u \in K_\pm \Longleftrightarrow A^* u = \pm i u \Longleftrightarrow u = 0.$$

Entonces $K_\pm = \{0\}$ y eso es una contradicción, pues los índices de deficiencia de $A$ son $(1,1)$. Por lo tanto, $u_+$ y $u_-$ son linealmente independientes. Entonces $c_1 = c_2$.
Si $c_1 = c_2 = 0$, entonces $x, y \in D(A)$. En particular, $Ax = R_\beta x = ax$ y como $A \subseteq R_\alpha$ tendríamos que $x \in Ker(R_\alpha - a)$, que contradice a la hipótesis. Por lo tanto, $c_1 \neq 0 \neq c_2$ y así

$$(c_1 e^{\beta i} - c_2 e^{\gamma i}) = 0 \Longrightarrow e^{\beta i} = e^{\gamma i} \Longrightarrow \beta = \gamma.$$

En conclusión, $a$ es valor propio de $R_\theta$ a lo más para un $\theta \in [0, 2\pi)$. □

## 2.2. Operadores de Sturm-Liouville con $\delta$-interacciones

Sean $-\infty \leq a < b \leq \infty$ y $V \in L^1_{loc}(a,b)$. Consideramos la expresión diferencial

$$\tau = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

Sea $p \in (a,b)$. Definimos al operador maximal $T_{\alpha,p}$ tal que $T_{\alpha,p} = \tau$ y $f \in D(T_{\alpha,p})$ si[1]

$f \in L^2(a,b)$, $f$ y $f'$ son absolutamente continuas sobre todo subintervalo cerrado de $(a,p) \cup (p,b)$, $\tau f \in L^2(a,b)$, $f$ es continua en $p$ y $f'(p+) - f'(p-) = \alpha f(p)$.

Consideraremos también a la expresión diferencial

$$\tau_{\alpha,p} = \tau + \alpha \delta(x - p).$$

Con ello tenemos las siguientes definiciones.

**Definición 2.2.1.** *Definimos el corchete de Lagrange como*

$$[f,g](x) = det \begin{pmatrix} \overline{f(x)} & g(x) \\ \overline{f'(x)} & g'(x+) \end{pmatrix} \ \textit{con } f, g \in D(T_{\alpha,p}).$$

Notemos los siguiente:

[1]Usaremos la notación $f(a\pm) = lim_{x \to a^\pm} f(x)$.

- Aunque $f'$ y $g'$ sean continuas en $(a,p)\cup(p,b)$, no necesariamente lo son en $p$.
- $[f,g]\,(a+)$ y $[f,g]\,(b-)$ existen y se denotan por $[f,g]\,(a)$ y $[f,g]\,(b)$ respectivamente (ver [6, Theorem 2.2]).
- Por propiedades de determinates, para $f,g,h\in D(T_{\alpha,p})$ y $c\in\mathbb{C}$ tenemos que

$$[f,g+h]\,(x)=[f,g]\,(x)+[f,h]\,(x) \tag{2.1}$$

$$[f,cg]\,(x)=c\,[f,g]\,(x). \tag{2.2}$$

**Definición 2.2.2.** *Se dice que $f$ es una solución de $(\tau_{\alpha,p}-z)\,h=0$ con $z\in\mathbb{C}$ si $f$ y $f'$ son absolutamente continuas sobre todo $D\subseteq(a,p)\cup(p,b)$ subintervalo cerrado, $\tau f-zf=0$, $f$ es continua en $p$ y $f'(p+)-f'(p-)=\alpha f(p)$.*

**Definición 2.2.3.** *Decimos que $\tau_{\alpha,p}$ esta en el caso círculo límite (ccl) en $a$ si todas las soluciones de $(\tau_{\alpha,p}-z)\,h=0$, para todo $z\in\mathbb{C}$, son cuadrado integrables en una vecindad de $a$ ó en el caso punto límite (cpl) si algúna solución de $(\tau_{\alpha,p}-z)\,h=0$, para todo $z\in\mathbb{C}$, no es cuadrado integrable en una vecindad de $a$. Análogamente para $b$.*

De la definición anterior, tenemos el siguiente teorema ([6, Theorem 4.4]).

**Teorema 2.2.1** (Alternativa de Weyl)**.** *Para todo $\alpha\in\mathbb{R}$, $\tau_{\alpha,p}$ es ccl en $a$ ó cpl en $a$. Análogamente para $b$.*

Por la Alternativa de Weyl tenemos lo siguiente:

- Si $\tau_{\alpha,p}$ es cpl en $a$ y $b$, entonces $T_{\alpha,p}$ es autoadjunto en $L^2(a,b)$ (ver [6, Theorem 2.2, Theorem 4.5(a), Theorem 4.6]).
- Si $\tau_{\alpha,p}$ es ccl en $a$ ó $b$, no podemos concluir que $T_{\alpha,p}$ sea autoadjunto. Entonces consideramos la restricción autoadjunta del operador $T_{\alpha,p}$ dada por $H_{\alpha,p}$ tal que

$$f\in D(H_{\alpha,p})\Longleftrightarrow f\in D(T_{\alpha,p}):[v,f]\,(a)=0 \ \textit{si}\ \tau_{\alpha,p}\ \textit{esta en ccl en}\ a \ \text{ ó}$$
$$[w,f]\,(b)=0\ \textit{si}\ \tau_{\alpha,p}\ \textit{esta en ccl en}\ b$$

  donde $v$ y $w$ son soluciones reales no triviales de $(\tau_{\alpha,p}-z)\,h=0$ con $z\in\mathbb{R}$ cercanas a los puntos $a$ y $b$ respectivamente. Es decir, cada restricción esta determinada por las funciones $v$ y $w$ (ver [6, Theorem 5.2]).

**Definición 2.2.4.** *Sean $g_1$ y $g_2$ soluciones de $(\tau_{\alpha,p}-z)\,h=0$. Definimos el Wronskiano de $g_1$ y $g_2$ como*

$$W(g_1,g_2)(x)=det\begin{pmatrix} g_1(x) & g_2(x)\\ g_1'(x+) & g_2'(x+)\end{pmatrix}\ \textit{con}\ x\in(a,b).$$

Sabemos que el Wronskiano es constante en $(a, b)$. Además, las soluciones $g_1$ y $g_2$ de $(\tau_{\alpha,p} - z)\, h = 0$ existen y son linealmente independientes, por lo que $W(g_1, g_2) \neq 0$ (véase [6, Lemma 4.2]). Podemos dar la siguiente definición.

**Definición 2.2.5.** *Sean $g_a$ y $g_b$ soluciones de $(\tau - z)\, h = 0$ para algún $z \in \mathbb{C}$ tales que $[v, g_a]\,(a) = 0$ si $\tau$ esta en ccl en $a$ ó $[w, g_b]\,(b) = 0$ si $\tau$ esta en ccl en $b$. Definimos la función de Green para $H_{0,p}$ (determinado por $v$ y $w$) como $G_z : (a, b) \times (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$G_z(x, y) = \frac{1}{W(g_b, g_a)} \begin{cases} g_a(x) g_b(y) & si \quad a < x \leqslant y \\ \\ g_a(y) g_b(x) & si \quad b > x > y \end{cases}$$

Notemos que $G_z \in L^2\left((a, b)^2\right)$, pues $g_a, g_b \in L^2\,(a, b)$. En [6, Theorem 5.2] se obtiene una expresión para el operador resolvente de $H_{0,p}$ en términos de su función de Green para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Esta es la siguiente

$$(H_{0,p} - z)^{-1} g = \int_a^b G_z(\cdot, y) g(y) dy. \tag{2.3}$$

Consideraremos que $\tau$ es ccl en $a$ ó en $b$. Definimos el funcional $\Psi : D(H_{0,p}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\Psi(g) = g(p)$. Recordemos que para $f, g \in L^2(a, b)$ el producto interior se da por $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$. Denotamos por $\mu$ a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, *supp* $f$ al soporte de la función $f$ y $C_0^\infty(a, b)$ al conjunto de funciones en $C^\infty(a, b)$ con soporte compacto contenido en $(a, b)$. Obtenemos el siguiente lema.

**Lema 2.2.1.** $C_0^\infty(a, b) \subseteq D(H_{0,p})$.

*Demostración.* Sea $f \in C_0^\infty(a, b)$. Como es continua sobre el conjunto compacto *supp* $f$, alcanza su máximo o mínimo. Es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leqslant c$ para todo $x \in$ *supp* $f$. Como *supp* $f$ es acotado tenemos que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_{supp\ f} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{supp\ f} c^2 dx = c^2 \mu(supp\ f) < \infty.$$

Ya que toda función continua es medible, $f \in L^2(a, b)$. Como $f$ y $f'$ son diferenciables sobre $(a, b)$, entonces son absolutamente continuas sobre todo subintervalo cerrado de $(a, b)$. En particular, $f$ es continua en $p$ y $f'(p+) - f'(p-) = f'(p) - f'(p) = 0$. Además, $f''$ es continua en $(a, b)$ y *supp* $f'' \subseteq (a, b)$. Por el argumento anterior, $f'' \in L^2(a, b)$. También, $Vf \in L^2(a, b)$ pues *supp* $Vf =$ *supp* $f$. Por lo tanto, $\tau f \in L^2(a, b)$. Luego, $f \in D(T_{0,p})$.
Sean $v$ y $w$ las funciones que determinan a $H_{0,p}$. Como *supp* $f$ y *supp* $f'$ nunca alcanzan los puntos $a$ y $b$, tenemos que

$$[v, f]\,(a) = v(a+) f'(a+) - v'(a+) f(a+) = 0 \text{ si } \tau \text{ es ccl en } a$$

$$[w, f]\,(b) = w(b-) f'(b-) - w'(b-) f(b-) = 0 \text{ si } \tau \text{ es ccl en } b.$$

En conclusión, $f \in D(H_{0,p})$. □

Para los siguientes resultados compare [3].

**Lema 2.2.2.** *Para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se cumplen los siguientes enunciados.*

*a)* $\overline{G_z} = G_{\overline{z}}$.

*b)* $G_z(p,\cdot) \in Rg(\widehat{H}_{0,p} - \overline{z})^{\perp}$.

*Demostración.* a) Sean $g_a$ y $g_b$ funciones que cumplen la definición 2.2.5. Entonces

$$\overline{G_z(x,y)} = \frac{1}{\overline{W(g_b,g_a)}} \begin{cases} \overline{g_a(x)}\,\overline{g_b(y)} & si \quad a < x \leqslant y \\ \\ \overline{g_a(y)}\,\overline{g_b(x)} & si \quad b > x > y \end{cases}$$

Veamos que $\overline{g_a}$ y $\overline{g_b}$ cumplen las condiciones de la definición 2.2.5. Como $g_a$ es de variable real, tenemos que $\overline{g_a'} = \overline{g_a}'$. Por lo tanto,

$$\tau\overline{g_a} = -\overline{g_a}'' + V\overline{g_a} = -\overline{g_a''} + \overline{V g_a} = \overline{\tau g_a} = \overline{z g_a} = \overline{z}\,\overline{g_a}.$$

Análogamente para $\overline{g_b}$. Por lo tanto,

$$(\tau - \overline{z})\,\overline{g_c} = 0 \; con \; c = a, b. \tag{2.4}$$

Sean $v$ y $w$ las funciones que determinan a $H_{0,p}$. Como son reales, tenemos que

$$\overline{[v, g_a]\,(a)} = det \begin{pmatrix} v(a+) & \overline{g_a(a+)} \\ v'(a+) & \overline{g_a'(a+)} \end{pmatrix} = [v, \overline{g_a}]\,(a).$$

Entonces $[v, \overline{g_a}]\,(a) = 0$ si $\tau$ esta en ccl en $a$. Análogamente, $[w, \overline{g_b}]\,(b) = 0$ si $\tau$ esta en ccl en $b$. Por lo tanto,

$$G_{\overline{z}}(x,y) = \frac{1}{W(\overline{g_b},\overline{g_a})} \begin{cases} \overline{g_a(x)}\,\overline{g_b(y)} & si \quad a < x \leqslant y \\ \\ \overline{g_a(y)}\,\overline{g_b(x)} & si \quad b > x > y \end{cases}$$

Como $W(\overline{g_b},\overline{g_a}) = \overline{W(g_b,g_a)}$, obtenemos que $\overline{G_z(x,y)} = G_{\overline{z}}(x,y)$ para todo $x, y \in (a,b)$.

b) Sea $f \in D(\widehat{H}_{0,p})$. Entonces $f(p) = 0$ y por la igualdad 2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \langle G_z(p,\cdot), (\widehat{H}_{0,p} - \overline{z})f\rangle_{L^2} &= \int_a^b \overline{G_z(p,x)}(\widehat{H}_{0,p} - \overline{z})f(x)dx \\ &= \int_a^b G_{\overline{z}}(p,x)(\widehat{H}_{0,p} - \overline{z})f(x)dx \\ &= (H_{0,p} - \overline{z})^{-1}(\widehat{H}_{0,p} - \overline{z})f(p) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $G_z(p,\cdot) \in Rg(\widehat{H}_{0,p} - \overline{z})^{\perp}$.

□

En particular, $G_{\pm i}(p,\cdot) \in Rg(\widehat{H}_{0,p} \pm i)^{\perp}$. La siguiente proposición nos permitirá aplicar los resultados de la sección anterior.

**Proposición 2.2.1.** *a)* $\Psi \notin D(H_{0,p})^*$ *con la norma de* $L^2(a,b)$.

*b) El funcional* $\Psi(H_{0,p}+i)^{-1} : L^2(a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ *es acotado.*

*Demostración.* a) Sean $\varepsilon > 0$ tal que $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subseteq (a,b)$ y $F \in C_0^\infty(-\varepsilon,\varepsilon)$ tal que $F(0) = 1$ y $F(x) \in [0,1]$ para todo $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$. Escogemos una sucesión $(f_n)_{n=1}^\infty$ con $f_n(x) = F(n(x-p))$ para cada $n$. Observamos que para todo $n$,

$$f_n \in C_0^\infty\left(p - \frac{\varepsilon}{n}, p + \frac{\varepsilon}{n}\right).$$

Como $\left(p-\frac{\varepsilon}{n}, p+\frac{\varepsilon}{n}\right) \subseteq (a,b)$, podemos suponer que $f_n$ se anula en $(a,b)\setminus\left(p-\frac{\varepsilon}{n}, p+\frac{\varepsilon}{n}\right)$. Entonces $f_n \in C_0^\infty(a,b)$. Por el lema anterior, $f_n \in D(H_{0,p})$. Haciendo $u = n(x-p)$ tenemos que,

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_a^b f_n^2 \leqslant \int_a^b f_n = \int_{p-\frac{\varepsilon}{n}}^{p+\frac{\varepsilon}{n}} F(n(x-p))dx = \int_{u\left(p-\frac{\varepsilon}{n}\right)}^{u\left(p+\frac{\varepsilon}{n}\right)} \frac{F(u)}{n}du = \frac{1}{n}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F(u)du.$$

Por lo tanto, $lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^2} = 0$. Si existiera $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|\Psi\|_{D(H_{0,p})^*} = k$, entonces

$$1 = |f_n(p)| = |\Psi f_n| \leqslant k\|f_n\|_{L^2}.$$

Haciendo $n \longrightarrow \infty$ en lo anterior, obtenemos una contradicción. En conclusión, $\Psi$ no es acotado.

b) Por 2.3, para $f \in L^2(a,b)$ tenemos que

$$(H_{0,p}+i)^{-1}f = \int_a^b G_{-i}(\cdot,y)f(y)dy.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el lema anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\Psi(H_{0,p}+i)^{-1}f\right| = \left|(H_{0,p}+i)^{-1}f(p)\right| &= \left|\int_a^b G_{-i}(p,y)f(y)dy\right| \\
&= \left|\int_a^b \overline{G_i(p,y)}f(y)dy\right| \\
&= |\langle G_i(p,\cdot), f\rangle_{L^2}| \\
&\leqslant \|G_i(p,\cdot)\|_{L^2}\,\|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como $G_i(p,\cdot) \in L_2(a,b)$, $\|G_i(p,\cdot)\|_{L^2} < \infty$. Por lo tanto, $\Psi(H_{0,p}+i)^{-1}$ es acotado.

□

Por el resultado anterior y las proposiciones 2.1.1 y 2.1.3, concluimos que $\widehat{H}_{0,p}$ es una restricción simétrica de $H_{0,p}$ con índices de deficiencia $(1,1)$ y tal que $D(\widehat{H}_{0,p}) = Ker\ \Psi$. Por el corolario 2.1.3, podemos considerar a los operadores $R_\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ como extensiones autoadjuntas de $\widehat{H}_{0,p}$. Además, por el corolario 2.1.2 $\widehat{H}_{0,p}$ es cerrado, es decir, en el Teorema de extensiones de von Neumann hacemos $\overline{\widehat{H}_{0,p}} = \widehat{H}_{0,p}$. Enunciamos el siguiente resultado ([1, Proposition 15.3(ii)]).

**Proposición 2.2.2.** *Sean $c \in (a,b)$ y $c_1, c_2, z \in \mathbb{C}$. Entonces existe una única solución $f$ de $(\tau - z)\,h = 0$ tal que $f(c) = c_1$ y $f'(c) = c_2$.*

Llegamos al siguiente teorema (ver [11, Pág. 75]). Usaremos la notación 1.6 con $A = \widehat{H}_{0,p}$.

**Teorema 2.2.2.** *Para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, salvo uno, existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $R_\theta = H_{\alpha,p}$. Inversamente, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que se cumple la igualdad.*

*Demostración.* Sea $\theta \in [0, 2\pi)$. Veamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $D(R_\theta) \subseteq D(T_{\alpha,p})$. Si $f \in D(R_\theta)$, por 1.11, existen $c \in \mathbb{C}$, $h \in D(\widehat{H}_{0,p})$ y $u_\pm \in K_\pm$ tales que $f = h + cu_+ + ce^{i\theta}u_-$. Por el lema anterior, podemos considerar que $u_\pm = G_{\pm i}(p, \cdot)$, pues $\widehat{H}_{0,p}$ tiene índices de deficiencia $(1,1)$. Tenemos que $h \in D(T_{0,p})$. Además, según la definición 2.2.5 notamos que $u_+$ esta en términos de $g_a$ y $g_b$, y $u_-$ en términos de $\overline{g_a}$ y $\overline{g_b}$. Por la definición 2.2.2, $u_\pm$ y $u'_\pm$ son absolutamente continuas sobre todo subintervalo cerrado de $(a,p)\cup(p,b)$, $\tau u_\pm \in L^2(a,b)$ y $u_\pm$ es continuo en $p$. Como $u_\pm \in L^2(a,b)$ y el espacio de funciones absolutamente continuas sobre un intervalo cerrado es lineal, concluimos que $f \in L^2(a,b)$, $f$ y $f'$ son absolutamente continuas sobre todo subintervalo cerrado de $(a,p)\cup(p,b)$, $\tau f \in L^2(a,b)$ y $f$ es continua en $p$.

Queremos encontrar un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(p+) - f'(p-) = \alpha f. \tag{2.5}$$

Si desarrollamos la expresión y como $h'(p+) = h'(p-)$, tenemos que

$$(h' + cu'_+ + ce^{i\theta}u'_-)(p+) - (h' + cu'_+ + ce^{i\theta}u'_-)(p-) = \alpha(h + cu_+ + ce^{i\theta}u_-)(p)$$

$$\Longrightarrow c\left[(u'_+ + e^{i\theta}u'_-)(p+) - (u'_+ + e^{i\theta}u'_-)(p-)\right] = \alpha c(u_+ + e^{i\theta}u_-)(p).$$

Si $u_+(p) = 0$, entonces $u_-(p) = G_{-i}(p,p) = \overline{G_i(p,p)} = \overline{u_+(p)} = 0$. Por lo tanto,

$$f \in D(\widehat{H}_{0,p}) \Longrightarrow R_\theta = \widehat{H}_{0,p}$$

Por lo que $\widehat{H}_{0,p}$ es autoadjunto pero es una contradicción pues sus índices de deficiencia son $(1,1)$. Por lo tanto, $u_\pm(p) \neq 0$. Si $c = 0$, entonces $f'(p+) - f'(p-) = \alpha f$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, consideramos que $c \neq 0$. Como $\frac{u_+(p)}{u_-(p)}$ tiene módulo 1, existe un $\theta'$ tal que $(u_+ + e^{i\theta'}u_-)(p) = 0$. Entonces también obtendriamos que $\widehat{H}_{0,p}$ es autoadjunto. Por lo tanto este $\theta'$ es el parámetro de $[0, 2\pi)$ que se excluye por hipótesis.

Tenemos que,

$$\alpha = \frac{(u'_+ + e^{i\theta}u'_-)(p+) - (u'_+ + e^{i\theta}u'_-)(p-)}{(u_+ + e^{i\theta}u_-)(p)}.$$

Como $g'_a(p+) = g'_a(p-)$ por la definición 2.2.2, ocurre que

$$\begin{aligned} u'_+(p+) - u'_+(p-) &= G'_i(p, p+) - G'_i(p, p-) \\ &= \frac{[g_a(p)g'_b(p+) - g_b(p)g'_a(p-)]}{W(g_b, g_a)} \\ &= \frac{-W(g_b, g_a)}{W(g_b, g_a)} = -1. \end{aligned}$$

Análogamente, $u'_-(p+) - u'_-(p-) = -1$. Por lo tanto,

$$\alpha = -\frac{1 + e^{i\theta}}{u_+(p) + e^{i\theta}\overline{u_+(p)}}.$$

Entonces se cumple 2.5 y así, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $D(R_\theta) \subseteq D(T_{\alpha,p})$. Por otra parte, consideramos $\alpha \in \mathbb{R}$. Si despejamos en la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha u_+(p) + \alpha e^{i\theta}\overline{u_+(p)} = -1 - e^{i\theta} &\implies 1 + \alpha u_+(p) = -e^{i\theta} - \alpha e^{i\theta}\overline{u_+(p)} \\ &\implies e^{i\theta} = \frac{1 + \alpha u_+(p)}{-1 - \alpha\overline{u_+(p)}}. \end{aligned}$$

Procediendo análogamente, tenemos que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $D(R_\theta) \subseteq D(T_{\alpha,p})$.

Sean $v$ y $w$ soluciones reales no triviales de $(\tau - \lambda)y = 0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, las funciones que determinan a $H_{0,p}$. Para $f = h + cu_+ + ce^{i\theta}u_-$, como $h \in D(H_{0,p})$ y por la definición 2.2.5, tenemos que

$$[v, h](a) = [v, g_a](a) = [v, \overline{g_a}](a) = 0 \text{ si } \tau \text{ es ccl en } a$$

ó

$$[w, h](b) = [w, g_b](b) = [w, \overline{g_b}](b) = 0 \text{ si } \tau \text{ es ccl en } b.$$

Sean $\dot{v}$ y $\dot{w}$ soluciones reales no triviales de $(\tau_{\alpha,p} - \lambda)y = 0$ cercanas a los puntos $a$ y $b$ respectivamente tales que $\dot{v} = v$ cerca de $a$ y $\dot{w} = w$ cerca de $b$. Además, todo punto cerca de $a$ es menor que $p$ y todo punto cerca de $b$ es mayor que $p$. Por lo tanto:
Si $\tau_{\alpha,p}$ es ccl en $a$, entonces

$$\begin{aligned} [\dot{v}, f](a) = [v, f](a) &= [v, h](a) + c[v, u_+](a) + ce^{i\theta}[v, u_-](a) \\ &= c[v, G_i(p, \cdot)](a) + ce^{i\theta}[v, G_{-i}(p, \cdot)](a) \\ &= \frac{cg_b(p)}{W(g_b, g_a)}[v, g_a](a) + \frac{ce^{i\theta}\overline{g_b(p)}}{W(\overline{g_b}, \overline{g_a})}[v, \overline{g_a}](a) = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, si $\tau_{\alpha,p}$ es ccl en $b$, entonces

$$[\dot{w}, f](b) = [w, f](b) = \frac{cg_a(p)}{W(g_b, g_a)}[w, g_b](b) + \frac{ce^{i\theta}\overline{g_a(p)}}{W(\overline{g_b}, \overline{g_a})}[w, \overline{g_b}](b) = 0.$$

Veamos que $\dot{v}$ y $\dot{w}$ existen. Por la proposición 2.2.2 existe una única solución $\widehat{v}$ de $(\tau - \lambda)y = 0$ tal que $\widehat{v}(p) = v(p)$ y $\widehat{v}'(p) = v'(p) + \alpha v(p)$. Definimos la función

$$\dot{v}(x) = \begin{cases} v(x) & si \quad x \leqslant p \\ \\ \widehat{v}(x) & si \quad x > p \end{cases}.$$

Además, $\dot{v}'(p+) - \dot{v}'(p-) = \widehat{v}'(p) - v'(p) = v'(p) + \alpha v(p) - v'(p) = \alpha \dot{v}(p)$. Por lo tanto, $\dot{v}$ cumple la definición 2.2.2 para $(\tau_{\alpha,p} - \lambda)y = 0$ y $\dot{v} = v$ cerca de $a$. Análogamente, existe una única solución $\widehat{w}$ de $(\tau - \lambda)y = 0$ tal que $\widehat{w}(p) = w(p)$ y $\widehat{w}'(p) = w'(p) - \alpha w(p)$ y definimos

$$\dot{w}(x) = \begin{cases} \widehat{w}(x) & si \quad x \leqslant p \\ \\ w(x) & si \quad x > p \end{cases}$$

tal que $\dot{w}'(p+) - \dot{w}'(p-) = w'(p) - \widehat{w}'(p) = \alpha \dot{w}(p)$. Entonces $\dot{w}$ es una solución de $(\tau_{\alpha,p} - \lambda)y = 0$ y $\dot{w} = w$ cerca de $b$. Como $\dot{v}$ y $\dot{w}$ determinan a $H_{\alpha,p}$, tenemos que $f \in D(H_{\alpha,p})$. Por lo tanto, $D(R_\theta) \subseteq D(H_{\alpha,p})$.

Veamos que $R_\theta = \tau$ en $D(R_\theta)$. Consideramos a $f = h + cu_+ + ce^{i\theta}u_-$ como en lo anterior. Por 1.8, tenemos que $R_\theta f = \widehat{H}_{0,p}h + icu_+ - ice^{i\theta}u_-$. Por la definición 2.2.5, tenemos que

$$(\tau - i)\, g_c = 0 \text{ con } c = a \text{ ó } b.$$

Así,

$$p \leqslant x < b \Longrightarrow (\tau - i)\, u_+(x) = (\tau - i)\, \frac{g_a(p)g_b(x)}{W(g_b, g_a)} = 0$$

$$a < x < p \Longrightarrow (\tau - i)\, u_+(x) = (\tau - i)\, \frac{g_b(p)g_a(x)}{W(g_b, g_a)} = 0$$

Por lo tanto, $\tau u_+ = iu_+$. Por 2.4, análogamente tenemos que $\tau u_- = -iu_-$. También, $\widehat{H}_{0,p}h = H_{0,p}h = \tau h$. Por lo tanto,

$$R_\theta f = \tau h + c\tau u_+ + ce^{i\theta}\tau u_- = \tau f = H_{\alpha,p}f.$$

Por lo tanto, $R_\theta \subseteq H_{\alpha,p}$. Como ambos operadores son autoadjuntos, concluimos que $H_{\alpha,p} = R_\theta$.

Si dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\dot{\theta} \in [0, 2\pi)$ tal que $\dot{\theta} \neq \theta$ y $H_{\alpha,p} = R_{\dot{\theta}}$, entonces para $u_+ + e^{i\theta}u_- \in D(R_\theta) = D(R_{\dot{\theta}})$ existen $g \in D(\widehat{H}_{0,p})$ y $c \in \mathbb{C}$ tales que

$$u_+ + e^{i\theta}u_- = g + cu_+ + ce^{i\dot{\theta}}u_-.$$

Por ser una suma directa, $g = 0$, $c = 1$ y $e^{i\theta} = e^{i\dot{\theta}}$. Entonces $\dot{\theta} = \theta$.
Supongamos que dado $\theta \in [0, 2\pi)$ existe $\dot{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{\alpha} \neq \alpha$ y $R_\theta = H_{\dot{\alpha},p}$. Entonces para $f \in D(H_{\dot{\alpha},p}) = D(H_{\alpha,p})$ tenemos que

$$\dot{\alpha} f(p) = f'(p+) - f'(p-) = \alpha f(p). \tag{2.6}$$

Si $f(p) = 0$ para todo $f \in D(H_{\alpha,p})$, entonces

$$D(R_\theta) = D(H_{\alpha,p}) \subseteq D(\widehat{H}_{0,p}) \Longrightarrow D(R_\theta) = D(\widehat{H}_{0,p})$$

y eso no es posible porque $\widehat{H}_{0,p}$ no es autoadjunto. Por lo tanto, existe $f \in D(H_{\dot{\alpha},p})$ tal que $f(p) \neq 0$ y de 2.6, tenemos que $\dot{\alpha} = \alpha$. En conclusión, se cumple el teorema. □

Finalmente, obtenemos el resultado más importante de este trabajo.

**Corolario 2.2.1.** *Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces es valor propio de $H_{\alpha,p}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ ó a lo más para uno.*

*Demostración.* Queremos probar que si $a$ no es valor propio de $H_{\alpha,p}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $a$ es valor propio de $H_{\alpha,p}$ a lo más para un $\alpha \in \mathbb{R}$.
Supongamos que existen $\rho, \eta, \kappa \in \mathbb{R}$ tales que $a$ no es valor propio de $H_{\rho,p}$ pero si de $H_{\eta,p}$ y $H_{\kappa,p}$. Por el teorema anterior, existen $\gamma, \theta, \beta \in [0, 2\pi)$ diferentes tales que $H_{\rho,p} = R_\gamma$, $H_{\eta,p} = R_\theta$ y $H_{\kappa,p} = R_\beta$. Como $a$ no es valor propio de $R_\gamma$, se cumple el segundo caso del teorema 2.1.1. Pero como $a$ es valor propio de $R_\theta$ y $R_\beta$, entonces $\theta = \beta$. Por lo tanto, $H_{\eta,p} = H_{\kappa,p}$ y por el teorema anterior, $\eta = \kappa$. Por lo tanto, $a$ es valor propio de $H_{\alpha,p}$ a lo más para un $\alpha \in \mathbb{R}$. De lo contrario, lo es para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. □

# Bibliografía


[1] K. Schmüdgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 265 (Springer, Dordrecht, 2012).

[2] B. Simon, *Operator Theory: A Comprehensive Course in Analysis, Part 4,* American Mathematical Society (United States of America 2015).

[3] Rafael del Río y Asaf L. Franco, *Random Sturm-Liouville Operators with Point Interactions,* Preimpreso.

[4] S. Albeverio y P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators,* London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 271 (Cambridge University Press, Cambridge, 2000), Solvable Schrödinger type operators.

[5] S. Albeverio y P. Kurasov, *Rank one perturbations of not semibounded operators,* Integral Equations Operator Theory 27(4), 379-400 (1997).

[6] D. Buschmann, G. Stolz, y J. Weidmann, *One-dimensional Schrödinger operators with local point interactions,* J. Reine Angew. Math. 467, 169-186 (1995).

[7] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications,* John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1978.

[8] W. F. Donoghue Jr., *On the perturbation of spectra,* Comm. Pure Appl. Math. 18, 559-579 (1965).

[9] R. Del Río, N. Makarov y B. Simon, *Operators with singular continuous spectrum. II. Rank one operators,* Comm. Math. Phys. 165 (1994), no. 1, 59-67.

[10] Rafael René Del Río, *A forbidden set for embedded eigenvalues,* Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), no. 1, 77-82.

[11] S. Albeverio, F. Gesztesy, R. H∅egh-Krohn y H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics,* Second edition. With an appendix by Pavel Exner. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005.